



---

# ISTITUZIONI DI ANALISI PER LE APPLICAZIONI

12 CFU - 1° e 2° semestre

## Docenti titolari dell'insegnamento

**ALFONSO VILLANI** - MODULO 1 - MAT/05 - 6 CFU

**Email:** villani@dmi.unict.it

**Edificio / Indirizzo:** Ufficio 345, Dipartimento di Matematica e Informatica, viale A. Doria 6, 95125 Catania

**Telefono:** 095 7383061

**Orario ricevimento:** lunedì 11-13, giovedì 12-13

**GIUSEPPE DI FAZIO** - MODULO 2 - MAT/05 - 6 CFU

**Email:** giuseppedifazio@unict.it

**Edificio / Indirizzo:** Dipartimento di Matematica e Informatica

**Telefono:** 0957383016

**Orario ricevimento:** Consultare la pagina <http://www.dmi.unict.it/~difazio/Ricev.html>

---

## OBIETTIVI FORMATIVI

### ▪ MODULO 1

Il corso si propone di fare apprendere le tecniche più usuali ed i principali teoremi nell'ambito della Teoria della Misura e dell'Integrazione astratta, con il duplice intento di arricchire il bagaglio culturale del laureato della LM40 nel campo dell'Analisi Matematica e di fornirgli utili prerequisiti per poter seguire corsi più avanzati.

In particolare, il corso si propone di far acquisire agli studenti le seguenti competenze:

**1) Conoscenza e capacità di comprensione (knowledge and understanding):** Conoscenza di risultati e di metodi fondamentali della Teoria della Misura e dell'Integrazione astratta. Capacità di leggere, comprendere e approfondire un argomento della letteratura matematica e riproporlo in modo chiaro ed accurato. Capacità di comprendere i problemi e di estrarne gli elementi sostanziali.

**2) Capacità di applicare conoscenza e comprensione (applying knowledge and understanding):** Capacità di costruire o risolvere esempi od esercizi e di affrontare problemi teorici nuovi, ricercando le tecniche più adatte e applicandole opportunamente.

**3) Autonomia di giudizio (making judgements):** Essere in grado di produrre proposte atte a interpretare correttamente problematiche complesse nell'ambito della Teoria della Misura e dell'Integrazione astratta e delle sue applicazioni. Essere in grado di formulare autonomamente giudizi pertinenti sull'applicabilità di modelli propri della Teoria della Misura e dell'Integrazione astratta a situazioni teoriche e/o concrete.

**4) Abilità comunicative (communication skills):** Capacità di presentare argomenti, problemi, idee e soluzioni, sia proprie che altrui, in termini matematici e le loro conclusioni, con chiarezza e accuratezza e con modalità adeguate agli ascoltatori a cui ci si rivolge, sia in forma orale che in forma scritta. Capacità di motivare chiaramente la scelta delle strategie, metodi e contenuti, nonché degli strumenti computazionali adottati.

**5) Capacità di apprendimento (learning skills):** Leggere e approfondire un argomento della letteratura nell'ambito della Teoria della Misura e dell'Integrazione astratta. Affrontare in modo autonomo lo studio sistematico di argomenti di Teoria della Misura non precedentemente approfonditi.

## ▪ **MODULO 2**

Il corso introduce gli studenti ad argomenti di Analisi Matematica e Funzionale molto avanzati. Nella prima parte del corso vengono presentati alcuni importanti risultati concernente l'Analisi Matematica di alcuni operatori integrali e viene studiata la moderna ed importante Teoria delle distribuzioni. Successivamente lo studente viene introdotto allo studio delle equazioni alle derivate parziali. Dapprima si presenta la teoria classica e dopo viene presentata la teoria moderna delle equazioni differenziali con particolare riguardo alla soluzione del XIX problema di Hilbert.

**Conoscenza e capacità di comprensione** (knowledge and understanding): l'obiettivo del corso è quello di far acquisire i fondamenti teorici riguardo alle principali tecniche in uso per le Equazioni alle derivate parziali e ai problemi relativi tra cui i problemi al contorno, i problemi di evoluzione e i problemi inversi.

**Capacità di applicare conoscenza e comprensione** (applying knowledge and understanding): lo studente acquisirà le competenze necessarie per studiare modelli Matematici particolarmente avanzati.

**Autonomia di giudizio** (making judgements): Lo studente sarà in grado di elaborare autonomamente proprie soluzioni a problemi avanzati concernenti modelli che coinvolgono equazioni alle derivate parziali.

**Abilità comunicative** (communication skills): lo studente acquisirà ulteriori abilità comunicative e di appropriatezza espressiva nell'impiego del linguaggio teorico nell'ambito generale dell'Analisi Matematica e Funzionale.

**Capacità di apprendimento** (learning skills): il corso si propone, come obiettivo, di fornire allo studente le necessarie metodologie teoriche e pratiche per poter affrontare e risolvere autonomamente nuove problematiche che dovessero sorgere durante l'attività progettuale tipica dell'ambito Matematico.

## **Risorse Disponibili**

Gli studenti potranno approfondire gli argomenti esposti durante le lezioni frontali mediante la lettura attenta e critica dei libri di testo. Potranno inoltre avere colloqui di gruppo o individuali con il docente al di fuori dell'orario di lezione per chiarire e fugare eventuali dubbi su argomenti trattati a lezione.

## MODALITÀ DI SVOLGIMENTO DELL'INSEGNAMENTO

### ▪ MODULO 1

I principali argomenti del programma saranno illustrati dal docente, con lezioni frontali, nei loro aspetti generali e con particolare riguardo ai punti in cui si introducono nuove idee. Gli approfondimenti relativi a tali capitoli ed altri argomenti particolari saranno esposti in aula da gruppi di studenti, che si costituiranno di volta in volta rispettando un criterio di avvicendamento. Ciò persegue l'intento di fare acquisire agli studenti quel grado di autonomia nello studio e nella preparazione dell'esposizione che è indispensabile sia per coloro che vorranno inserirsi nel campo della ricerca sia per i futuri insegnanti.

Qualora l'insegnamento venisse impartito in modalità mista o a distanza potranno essere introdotte le necessarie variazioni rispetto a quanto dichiarato in precedenza, al fine di rispettare il programma previsto e riportato nel syllabus.

### ▪ MODULO 2

Il corso ha un taglio molto teorico sebbene i contenuti possano essere applicati a problemi dell'Ingegneria e della Fisica. Le lezioni sono per la maggior parte frontali. Tuttavia, circa il 20 % delle ore viene destinato allo svolgimento di esercizi in modo cooperativo. Questo per fare sì che gli studenti sperimentino in prima persona quali sono le oggettive difficoltà del corso e possano acquisire i mezzi per superare tali difficoltà.

**Qualora l'insegnamento venisse impartito in modalità mista o a distanza potranno essere introdotte le necessarie variazioni rispetto a quanto dichiarato in precedenza, al fine di rispettare il programma previsto e riportato nel syllabus.**

## PREREQUISITI RICHIESTI

### ▪ MODULO 1

I principali argomenti dei corsi di Analisi Matematica 1 e 2 e di Topologia.

### ▪ MODULO 2

Contenuto dei corsi di Analisi Matematica I e II. Elementi di teoria della misura.

---

## FREQUENZA LEZIONI

### ▪ MODULO 1

La frequenza alle lezioni non è obbligatoria ma è fortemente raccomandata.

### ▪ MODULO 2

Vivamente consigliata.

---

## CONTENUTI DEL CORSO

### ▪ MODULO 1

La misura di Lebesgue. Misure, misure esterne e teorema di Carathéodory. Boreliani di uno spazio topologico. Misure di Borel e funzioni di distribuzione. Completamento di uno spazio di misura. Funzioni misurabili. Insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani. Misure con segno. Integrazione in uno spazio di misura. Spazi  $L^p$ . Vari modi di convergenza di una successione di funzioni misurabili. Prodotto di misure; teoremi di Tonelli e di Fubini.

### ▪ MODULO 2

Primi elementi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. Introduzione alle soluzioni generalizzate. Teoria delle distribuzioni. Problema della regolarità per alcune equazioni di tipo ellittico.

---

## TESTI DI RIFERIMENTO

### ▪ MODULO 1

1. A. Villani, Appunti del corso di Istituzioni di Analisi Superiore, dispense on line
2. W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third edition, Mc Graw Hill

### ▪ MODULO 2

L'elenco dei libri di testo è consultabile alla pagina seguente

<https://www.dmi.unict.it/difazio/>

## ALTRO MATERIALE DIDATTICO

### ▪ MODULO 1

Si veda <http://www.dmi.unict.it/~villani/>

### ▪ MODULO 2

Verranno distribuite delle note preparate dal docente su qualche argomento difficilmente reperibile nei testi.

---

## PROGRAMMAZIONE DEL CORSO

### MODULO 1

	Argomenti	Riferimenti testi
1	La retta reale estesa: ordinamento e topologia	Testo 1: cap. 1
2	Successioni di insiemi.	Testo 1: cap. 3

3	La misura di Lebesgue.	Testo 1: cap. 4
4	Misure, misure esterne e teorema di Caratheodory.	Testo 1: cap. 5
5	Boreliani di uno spazio topologico.	Testo 1: cap. 6
6	Misure di Borel e funzioni di distribuzione.	Testo 1: cap. 7
7	Completamento di uno spazio di misura.	Testo 1: cap. 8
8	Funzioni misurabili.	Testo 1: capp. 9 e 12
9	Misure con segno.	Testo 1: cap 11
10	Insiemi non misurabili secondo Lebesgue e insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani.	Testo 1: cap. 10
11	Intrgrazione in uno spazio di misura.	Testo 1: cap. 13
12	Spazi $L^p$ .	Testo 1: capp. 15 e 19
13	Vari modi di convergenza di una successione di funzioni misurabili.	Testo 1: cap 16
14	Prodotto di misure e teorema di Fubini.	Testo 2: cap. 8

## MODULO 2

Argomenti	Riferimenti testi
1	Funzioni armoniche
2	Soluzioni deboli.
3	Spazi di Sobolev
4	Teorema di De Giorgi.

## VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

### MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

#### ▪ MODULO 1

Durante il corso saranno assegnati esercizi da svolgere a casa e argomenti da studiare autonomamente, che verranno poi esposti in classe dagli studenti.

Al termine del corso è prevista una prova orale finale.

Il voto finale d'esame sarà attribuito tenendo conto, oltre che della prova orale finale, anche delle eventuali prove in itinere (orali) riguardanti specifiche parti del programma e dell'attività svolta in classe durante il corso.

La verifica dell'apprendimento potrà essere effettuata anche per via telematica, qualora le condizioni lo dovessero richiedere.

(Learning assessment may also be carried out on line, should the conditions require it.)

▪ **MODULO 2**

La verifica viene effettuata mediante colloquio. Per ulteriori dettagli si consulti la pagina

<http://www.dmi.unict.it/difazio/mate/PDE/regole-esami.html>

**La verifica dell'apprendimento potrà essere effettuata anche per via telematica, qualora le condizioni lo dovessero richiedere.**

**ESEMPI DI DOMANDE E/O ESERCIZI FREQUENTI**

▪ **MODULO 1**

I titoli degli argomenti contenuti nella "Programmazione del corso" costituiscono esempi di domande frequenti.

▪ **MODULO 2**

Tutti gli argomenti inclusi nel programma possono essere oggetto di domande durante il colloquio d'esame.

---