



---

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - canale 1

MAT/03 - 9 CFU - 2° semestre

**Docente titolare dell'insegnamento**

**PIETRO URSINO**

---

## OBIETTIVI FORMATIVI

Si intende innanzitutto introdurre lo studente al linguaggio e al rigore necessari per lo studio dei concetti essenziali inerenti l'Algebra Lineare e la Geometria analitica: fra questi, teoria degli spazi vettoriali, calcolo matriciale, risoluzione di sistemi lineari, applicazioni lineari, calcolo di autovettori e autovalori, diagonalizzazione di matrici, rette e piani nello spazio, coniche nel piano e quadriche nello spazio. Si richiede che lo studente sia in grado di applicare tali concetti e metodi alla risoluzione di problemi concreti di algebra lineare e di geometria analitica che riguardano lo studio dei più semplici oggetti geometrici nel piano e nello spazio.

Lo studente affronterà vari aspetti teorici degli argomenti affrontati, affinando le capacità logiche allo scopo di utilizzare con rigore alcuni significativi metodi dimostrativi. Tali dimostrazioni saranno presentate in modo tale da cogliere ogni singolo e minimo passaggio necessario al raggiungimento dell'obiettivo.

Studiando l'Algebra Lineare e la Geometria e mettendosi alla prova mediante le esercitazioni, lo studente apprenderà a comunicare con rigore e chiarezza sia oralmente che per iscritto. Imparerà che utilizzare un linguaggio corretto è uno dei mezzi più importanti per comunicare con chiarezza il linguaggio scientifico, non solo in ambito matematico.

Gli studenti saranno in grado di utilizzare le nozioni, i concetti e le metodologie acquisite nell'ambito degli studi successivi e verranno stimolati ad approfondire alcuni argomenti.

## PREREQUISITI RICHIESTI

Risoluzione di equazioni e disequazioni. Trigonometria. Regola di Ruffini

---

## FREQUENZA LEZIONI

Lo studente è tenuto a frequentare almeno il 70% delle lezioni del corso per poter sostenere le prove in itinere. La frequenza è, comunque, consigliata per sostenere la prova d'esame. Se alternativamente lo studente ha superato la prima prova in Itinere ha automaticamente la possibilità di sostenere la seconda a prescindere dalla frequenza.

---

## CONTENUTI DEL CORSO

Algebra Lineare:

1. Generalità sugli insiemi, operazioni. Applicazioni tra insiemi, immagine e controimmagine, iniettività, suriettività, applicazioni biettive. Insiemi con operazioni, le principali strutture geometriche: gruppi, anelli, campi.
2. I vettori dello spazio ordinario. Somma di vettori, prodotto di un numero per un vettore. Prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto. Componenti dei vettori ed operazioni mediante componenti.
3. I numeri complessi, operazioni e proprietà. Forma algebrica e forma trigonometrica dei numeri complessi. Formula di Moivre. Radici n-esime dei numeri complessi.
4. Spazi vettoriali e loro proprietà. Esempi. Sottospazi. Intersezione, unione e somma di sottospazi. Indipendenza lineare, relativo criterio. Generatori di uno spazio. Base di uno spazio, metodo degli scarti successivi, completamento ad una base. Lemma di Steinitz\*, dimensione di uno spazio vettoriale. Formula di Grassmann\*. Somme dirette.
5. Generalità sulle matrici. Rango. Matrici ridotte e metodo di riduzione. Prodotto di matrici. Sistemi lineari, teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di riduzione (di Gauss), incognite libere. Inversa di una matrice quadrata. Sistemi omogenei e sottospazio delle soluzioni.
6. Determinanti e loro proprietà. I teoremi di Laplace\*. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Teorema di Binet\*. Teorema di Cramer. Teorema di Kronecker\*.
7. Applicazioni lineari e loro proprietà. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Iniettività, suriettività, isomorfismi. Lo spazio  $L(V,W)$ , suo isomorfismo\* con  $K^{\{m,n\}}$ . Studio delle applicazioni lineari. Cambio di base, matrici simili.
8. Autovalori, autovettori ed autospazi di un endomorfismo. Polinomio caratteristico. Dimensione degli autospazi. Indipendenza degli autovettori. Endomorfismi semplici e diagonalizzazione di matrici.

Geometria:

1. Geometria lineare nel piano. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. Rette e loro equazioni. Intersezioni tra rette. Coefficiente angolare. Distanze. Fasci di rette.
  2. Geometria lineare nello spazio. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. I piani e loro equazioni. Le rette, loro rappresentazione. Elementi impropri. Proprietà angolari di rette e piani. Distanze. Fasci di piani.
  3. Cambiamenti di coordinate nel piano, rotazioni e traslazioni. Coniche e matrici associate, invarianti ortogonali. Equazioni ridotte, riduzione di una conica a forma canonica. Classificazione delle coniche irriducibili. Studio delle coniche in forma canonica. Circonferenze. Rette tangenti. Fasci di coniche e loro uso per determinare coniche particolari.
  4. Quadriche nello spazio e matrici associate. Quadriche irriducibili. Vertici e quadriche degeneri. Coni e cilindri, loro sezioni. Equazioni ridotte, riduzione di una quadrica a forma canonica. Classificazione delle quadriche non degeneri. Sezioni di quadriche con rette e piani. Rette e piani tangenti.
- Le dimostrazioni dei teoremi contrassegnati con \* si possono omettere.

---

## TESTI DI RIFERIMENTO

1. S. Giuffrida, A. Ragusa: Corso di Algebra Lineare. Il Cigno Galileo Galilei, Roma, 1998. P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino. Algebra lineare: esercizi svolti. Cavallotto Edizioni, Catania, 2012.

2. G.Paxia: Lezioni di Geometria. Spazio Libri, Catania, 2000.
3. .P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino. Algebra lineare: esercizi svolti. Cavallotto Edizioni, Catania, 2012.
4. P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino. Geometria analitica: esercizi svolti. Cavallotto Edizioni, Catania, 2012.

## **ALTRO MATERIALE DIDATTICO**

<http://studium.unict.it/>

Argomenti Riferimenti testi

1 Introduzione alla teoria degli insiemi. Introduzione ai campi e spazi vettoriali. Determinante di una matrice. Calcolo del rango e riduzione di una matrice. Risoluzione dei sistemi lineari. Tempo richiesto: 9 ore

Libro di teoria: capitoli 1,3

Libro di esercizi: capitolo 1

2 Operazioni con le matrici. Tempo richiesto: 2 ore Libro di teoria: capitolo 3 Libro di esercizi: capitolo 1

3 Spazi vettoriali. Generatori e insiemi liberi. Sottospazi. Base e componenti rispetto a una base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Tempo richiesto: 9 ore

Libro di teoria: capitolo 2 Libro di esercizi: capitolo 2

4 Somma e intersezione di spazi vettoriali. Estrazione di una base da un sistema di generatori e completamento a base di un insieme libero. Tempo richiesto: 2 ore

Libro di teoria: capitolo 2 Libro di esercizi: capitolo 2

5 Applicazioni lineari e loro assegnazione. Studio di un'applicazione lineare. Calcolo di immagini e controimmagini. Tempo richiesto: 10 ore

Libro di teoria: capitolo 4 Libro di esercizi: capitoli 3,4

6 Matrici di cambio base e matrici simili. Operazioni con applicazioni lineari. Tempo richiesto: 2 ore

Libro di teoria: capitolo 4 Libro di esercizi: capitolo ,5

7 Autovalori, autovettori e autospazi. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.

Endomorfismi semplici. Diagonalizzazione di una matrice. Tempo richiesto: 9 ore

Libro di teoria: capitolo 5 Libro di esercizi: capitolo 6

8 Applicazioni sotto condizione. Restrizioni ed estensioni di applicazioni lineari. Tempo richiesto: 2 ore.

Libro di teoria: capitolo 5 Libro di esercizi: capitoli 7,8

9 Generalità sul calcolo vettoriale. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. Assegnazione di una retta e di un piano e loro equazioni. Punti impropri. Intersezioni. Parallelismo e ortogonalità. Fasci di rette e piani. Distanze. Tempo richiesto: 10 ore

Libro di teoria: capitoli 1, 2, 3

Libro di esercizi: capitolo 1

10 Angoli. Proiezioni ortogonali. Rette bisettrici e piani bisettori.

Simmetrie. Luoghi di rette. 3 ore

Libro di teoria: capitoli 1, 2, 3

Libro di esercizi: capitolo 1

11 Coniche e matrici associate. Cambiamenti di coordinate nel piano, invarianti ortogonali ed equazioni ridotte di una conica.

Classificazione delle coniche. Circonferenze. Rette tangenti. Fasci di coniche. Tempo richiesto: 8 ore

Libro di teoria: capitolo 4

Libro di esercizi: capitolo 2

12 Studio completo delle coniche. Coniche sotto condizione. Tempo richiesto: 4 ore.

Libro di teoria: capitolo 4

Libro di esercizi: capitolo 2

13 Quadriche e matrici associate. Quadriche irriducibili. Vertici di una quadrica e quadriche degeneri. Conica all'infinito. Coni e cilindri. Equazioni ridotte di una quadrica. Classificazione delle quadriche non degeneri. Tempo richiesto: 7 ore.

Libro di teoria: capitolo 5

Libro di esercizi: capitolo 3

14 Tangenza. Coniche sezione di una quadrica. Sfere. Tempo richiesto: 2 ore.

Libro di teoria: capitolo 5

Libro di esercizi: capitolo 3

---

## **VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO**

### **MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO**

#### **MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO**

La prova d'esame è composta da una prova scritta e una prova orale obbligatoria, cui si accede dopo aver superato la prova scritta (superamento della prova con 18/30).

Durante lo svolgimento delle lezioni sono previste due prove in itinere, entrambe della durata di un'ora e trenta, riservate esclusivamente agli studenti del primo anno.

Lo studente è tenuto a frequentare almeno il 70% delle lezioni del corso per poter sostenere le prove in itinere. La frequenza è, comunque, consigliata per sostenere la prova d'esame. Alternativamente coloro che hanno superato la prima prova possono sostenere la seconda prova in itinere a prescindere dalla frequenza.

La prima prova in itinere è costituita da esercizi in accordo alle competenze erogate nelle Unità Didattiche 1,2,3,4. Il superamento della prima prova in itinere permette di acquisire fino a 15 (superamento della prova con voto pari a 9).

La seconda prova in itinere è costituita da esercizi in accordo alle competenze erogate nelle Unità Didattiche 5,6,7. Si può partecipare alla seconda prova solo se si è superata la prima. Questa seconda prova permette di ottenere un voto massimo di 15 (superamento della prova con voto pari a 9).

Lo studente che abbia superato entrambe le prove in itinere deve integrare le due prove in itinere con la prova orale da svolgere negli appelli regolari (entro la fine dell'a.a.), per il superamento dell'esame.

#### **ESEMPI DI DOMANDE E/O ESERCIZI FREQUENTI**

##### Esercizi di Algebra Lineare

1. Studio di un'applicazione lineare al variare del parametro, determinandone nucleo e immagine.
2. Studio della semplicità di un endomorfismo al variare del parametro, determinandone, quando possibile, una base di autovettori.
3. Calcolo della controimmagine di un vettore, risoluzione di un sistema lineare, al variare del parametro, controimmagine di uno spazio vettoriale, immagine di uno spazio vettoriale.
4. Esercizi su somma diretta, sulle operazioni con le applicazioni lineari, applicazioni lineari indotte, restrizioni ed estensioni.

##### Esercizi di Geometria

1. Esercizi di geometria lineare nello spazio: parallelismo e perpendicolarità, distanze, proiezioni ortogonali, angoli.
  2. Studio di un fascio di coniche, già assegnato oppure da determinare. Studio completo di una conica. Coniche sotto condizione.
  3. Studio di quadriche al variare del parametro. Quadriche sotto condizione. Studio di una conica intersezione di una quadrica con un piano.
-